Leçon 239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemple et applications.

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ est un espace mesuré, et E un espace métrique. On considère $f : E \times X \to \mathbb{C}$ mesurable en x et on étudie $F(t) := \int_X f(t,x)d\mu(x)$.

1. Etude de la régularité. —

1. *Continuité.* —

- Théorème de continuité des intégrales à paramètre : Si $f(.,x)$ est presque sûrement continue en t, et si pour tout K compact de E on a une fonction g intégrable telle que $|f(t,x)| \leq |g(x)|$ sur $K \times E$, alors F est continue sur E.
- Rem : C'est une application du théorème de convergence dominée.
- Ex : Pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue, $\int_a^t f(x)dx$ est continue en t.
- Ex : La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-z}dx$ est continue sur $\{Re(z) > 0\}$.
- App : Dans le cas où $X = \mathbb{N}$ et où μ est la mesure de comptage, on obtient le théorème de continuité des séries de fonctions continues.
- Contre-ex : $F(t) = \int_0^{+\infty} xe^{-tx}dx$ n'est pas continue en 0.

2. *Dérivabilité.* —

- Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre : Ici, E =I intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f(.,x)$ est presque sûrement dérivable en t, si $f(t,.)$ est intégrable pour tout t, et si pour tout K compact de E on a une fonction g intégrable telle que $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq |g(x)|$ sur $K \times E$, alors F bien définie sur I et dérivable sur I, de dérivée $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)d\mu(x)$.
- Rem : Ce résultat se généralise au cas D^k et C^k.
- Ex : La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-z}dx$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
- App : Dans le cas où $X = \mathbb{N}$ et où μ est la mesure de comptage, on obtient le théorème de dérivabilité des séries de fonctions continues.
- Contre-exemple.
- Ex : $\int_0^{+\infty} \frac{sin(tx)}{x} e^{-x}dx = artcan(t)$
- Ex : Formule sommatoire de Poisson : Soit f de classe C^1 telle telle que $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$.
  Alors la fonction $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)$ est bien définie, continue, et 1-périodique, et la fonction $f^*(n) = \int_{\mathbb{R}} f(x).e^{-2i\pi nx}dx$ est bien définie, et l'on a :
  $S(t) = \frac{1}{a}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f^*(n)e^{im2\pi t}$
- Corollaire du Gourdon.
- Ex : La fonction $F(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\sin(x))dx$ est une solution de l'équation de Bessel $xy''(t) + y'(t) + xy(t) = 0$.

3. *Holomorphie.* —

- Théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres : Ici, E =Ω ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f(.,x)$ est presque sûrement holomorphe en t, si $f(t,.)$ est intégrable pour tout t, et si pour tout K compact de E on a une fonction g intégrable telle que $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq |g(x)|$ sur $K \times E$, alors F bien définie sur I et holomorphe sur I.
- Ex : La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-z}dx$ est holomorphe sur $\{Re(z) > 0\}$.
- Contre-exemple.
- **Dev** : Formule des compléments : Pour tout z tel que $0 < Re(z) < 1$, on a : $\Gamma(z).\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi.z)}$.
  Ainsi, la fonction $g : z \mapsto \frac{\pi}{sin(\pi.z)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-z)}$ définie sur $\{z \text{ tq } Re(z) > 1\} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$ est analytique et coïncide avec Γ sur $\{z \text{ tq } 0 < Re(z) < 1\}$.
  Cela permet de prolonger Γ analytiquement à $\mathbb{C} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$.

2. Convolution. —

1. *Convolution et régularisation.* —

- Def : Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables positives, on définit $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)d\lambda(y) \in [0, +\infty]$.
- Pro : Si ces quantités sont finies, on a $f * g = g * f$ et $f * (g * h) = ((f * g) * h)$
- Inégalité de Young pour la convolution : Pour $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et $f \in L^p$, $g \in L^q$, on a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_p.\|g\|_q$.
- Rem : On peut aussi convoler $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ avec $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.
- Pro : L^1 muni de * est donc une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
- Pro : L^1 ne possède pas d'unité.
- Pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. *Approximations de l'unité.* —

- Def : Approximation de l'unité : Une suite $(f_n)_n$ est appelée approximation de l'unité si : $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\lambda(x) = 1$, si $f_n \geq 0$, et si $\forall\varepsilon$, $\int_{|x|\geq\varepsilon} f_n(x)d\lambda(x) \to_n 0$.
- Ex : Pour $f(x) = \frac{1}{x^1+1}$, $f_n(x) = \frac{1}{n\pi}f(nx)$ est une approximation de l'unité.
- Pro : Pour $(f_n)_n$ approximation de l'unité et $g \in L^1$, $f_n * g \to_{\|.\|_1} g$.
  Si $f_n \in L^q$, cela est aussi vrai pour $g \in L^p$ avec $p = \frac{q}{q-1}$.
- Pro : Régularisation par convolution : Pour f de classe C^k dans L^p et $g \in L^q$ avec $q = \frac{p}{p-1}$, alors $f * g$ est de classe C^k par théorème de dérivation des intégrales à paramètres. La régularité de la convolée ne porte que sur la régularité d'un seul terme.
- Cor : C_c^∞ est dense dans L^p. (On convole une suite approchant f avec une approximation de l'unité qui soit C_c^∞)
- Def : $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e_n(t) = e^{int}$, $D_N := \sum_{n=-N}^N e_n$,$F_N := \frac{1}{N} . \sum_{n=0}^{N-1} D_n$.
- Théorème de Féjer : La suite des F_N est une approximation de l'unité et $F_N * f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ converge uniformément vers f pour tout f $2\pi-périodique$ continue.
  Si f admet juste une limite à droite et à gauche en tout point, alors $F_N * f(x) \to_N \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ ponctuellement.
- App : La famille des $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ l'espace des classes de fonctions 2π-périodiques et de carré intégrable.

- Théorème de Dirichlet : Si f est C^0 et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f. Si f est juste C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers $x \to \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.
- **Dev** : Equation de la chaleur sur le cercle : Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, l'équation différentielle $\partial_t u - \partial_x(\partial_x u) = 0$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ admet une unique solution f de classe C^2 telle que $f(t,.) \to_{t\to 0^+} u_0$ dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de la forme $f(x,t) = (u_0 * K_t)(x)$ pour $K_t(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2t}e^{inx}$.

3. Transformations de Fourier et de Laplace. —

1. Transformation de Fourier. —

- Def : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}f(y)dy$.
- Pro : $\widehat{f}$ est uniformément continue et bornée par $\|f.\|_1$.
- Thm : $\widehat{f}(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$. (Démontré avec la densité des fonctions C_c^1)
- Pro : On a $\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$. La transformée de Fourier linéarise la convolution.
- Pro : Si $x^k f(x) \in L^1$, on a $\widehat{f}(x) \in C^k$, avec $\widehat{f}^{(k)}(x) = (-i)^k \int_R e^{-ixy}y^k f(y)dy$.
- Pro : Si $f, f' \in L^1$, alors $\widehat{f'}(x) = -ix\widehat{f}(x)$
- Pro : Théorème d'inversion de Fourier : La transformée de Fourier est une bijection bicontinue sur $S(\mathbb{R})$, et on peut calculer son inverse.
- Rem : Ainsi, la transformée de Fourier est injective sur L^1.
- App : Les polynômes orthogonaux.
- Def : Fonction caractéristique Φ_X d'une v.a. réelle X.
- Pro : Si X est de densité $dP_X(x) = f(x)dx$ alors $\Phi_X = \widehat{f}$.
- Pro : L'injectivité de la transformée de Fourier implique que Φ_X caractérise la loi de X.
- Pro : Si X admet un moment d'ordre k, alors Φ_X est de classe C^k. Réciproquement, si Φ_X est de classe C^k, alors X admet un moment d'ordre $2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$.
- Théorème de Lévy : Une suite de v.a rélles $(X_n)_n$ converge en loi vers une v.a. X ssi Φ_{X_n} converge simplement vers Φ_X.
- App : Théorème Central de la limite.
- Ex : Fonctions caractéristiques de v.a. classiques.

2. Transformation de Laplace. —

- Pommellet, Madère : Des choses sur la transformation de Laplace hors probabilités.
- Def : Transformation de Laplace. (Barbe, Ledoux)
- Ex :
- Pro : La transformée de Laplace de X caractérise la loi de X.
- Pro : La transformée de Laplace de X est analytique sur l'intervalle sur lequel elle est bien définie.
- Ex : Processus de Galton-Watson. On utilise la transformée de Laplace de X pour étudier la proba d'extinction en temps fini.

Références

Zuily, Queffélec : Th de cont des IàP, Th de dériv des IàP, Th d'holom des IàP. Application à la fonction Γ.
Hauchecorne : Contre-Exemples d'IàP non continues/dérivables/holom en un point.
Briane, Pagès : Produit de convolution. Transormation de Fourier.
Objectif Agrégation : Polynômes orthogonaux. Th de régularisation du produit de convolution. Approximations de l'unité, Th de Féjer, Th de Dirichlet.
Gourdon : Exemples d'IàP de classe C^∞. Formule sommatoire de Poisson.
Amar-Materon : Formule des compléments.(Dev)
Candelpergler : Equation de la chaleur sur le cercle.(Dev)
Ouvrard : Fonction caractéristique, Fonction caractéristique et moments, exemples, Th de Lévy, TCL.
Pommellet, Madère, Barbe, Ledoux : Transformation de Laplace.

June 11, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes